MACIERZE LOSOWE
LISTA 9
Kumulanty, R-transformata

1. Wyznaczyć kumulanty klasyczne (κ_n) standardowej miary Gaussa $N(0,1)$.

2. Pokazać, że $\kappa_n = K_n$ dla $n \leq 3$, ale w ogólności $\kappa_4 \neq K_4$, czyli że czwarta kumulanta klasyczna pewnej miary probabilistycznej μ nie musi być równa czwartej kumulancie wolnej tej miary.

3. Niech będą dane wykładnicze funkcje generujące

$$A_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} z^n \quad \text{oraz} \quad L_\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n!} z^n$$

gdzie $(m_n)_{m\geq 0}$ oraz $(\kappa_n)_{n\geq 1}$ to ciągi momentów i klasycznych kumulant, odpowiednio, pewnej miary probabilistycznej μ. Wykorzystując kombinatoryczną definicję kumulant, pokazać, że zachodzi wzór

$$A_\mu(z) = \exp(L_\mu(z))$$

4. Wywnioskować, że jeżeli μ jest miarą probabilistyczną na prostej o nośniku zwartym, a jej transformata Fouriera ma postać

$$\mathcal{F}_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu(x)$$

to zachodzą wzory

$$\mathcal{F}_\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} m_n \quad \text{oraz} \quad \log(\mathcal{F}_\mu(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-it)^n}{n!} \kappa_n$$

5. Wyznaczyć R-transformatę rozkładu Wignera o średniej zero i wariancji a, którego transformata Cauchy'ego ma postać

$$G_\mu(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4a}}{2a}$$

Obliczyć splot wolny dwóch rozkladów Wignera o średniej zero i dowolnych wariancjach a, b.

6. Wyznaczyć R-transformatę rozkładu punktowego δ_a skupionego w jednym punkcie a na prostej rzeczywistej. Obliczyć splot wolny $\delta_a \boxplus \delta_b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Wyznaczyć R-transformatę rozkładu Bernoulliego postaci $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Pokazać, że splot wolny $\mu \boxplus \mu$ daje rozkład arcusa sinusa.

8. Niech będzie dana miara probabilistyczna, której wszystkie kumulanty wolne są równe $K_n = t > 0$. Wyznaczyć R-transformatę tej miary, a następnie jej transformatę Cauchy'ego. Wywnioskować, że jest to miara Marchenko-Pastura o parametrze t.

9. Niech będzie dana miara probabilistyczna, której wszystkie kumulanty klasyczne są równe $\kappa_n = \lambda > 0$. Wyznaczyć transformatę Fouriera tej miary i wywnioskować, że jest to miara Poissona o parametrze λ.

10. Porównać kumulantowy wzór na momenty miary Poissona o parametrze λ z kumulantowym wzorem na momenty rozkładu Marchenko-Pastura o parametrze t i wywnioskować, że ten ostatni pełni w probabilistyce wolnej rolę *wolnego rozkładu Poissona* o parametrze t.

Romuald Lenczewski